星五角形のヒ･ミ･ツ

ちょっとだけ フラクタル

いんとろだくしょん

ピタゴラスは考えた…　この世は数だ…　何でも数で表そう…

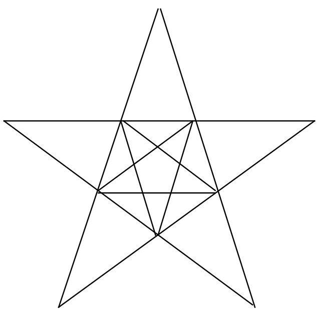
１は男で　２は女　　ならば，３は結婚…

６の約数は１・２・３　全部加えて６になる

こんな数を見つけよう…　マメを並べて考えた…

ドソドの音はいい響き　ドミソの音もいい響き

弦の長さの関係は？　これも数で表そう…



星の形は美しい　星の中にはまた星が…

無限に続く五角形　これも数で表したい…

３・４・５の三角形　９＋１６が２５で…

こんな三角探し出そう…　マメを並べて探し出そう…

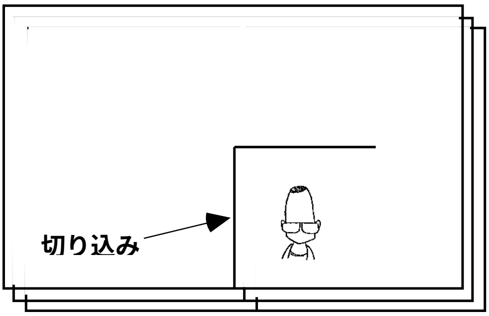
チ　ャ　レ　ン　ジ　1

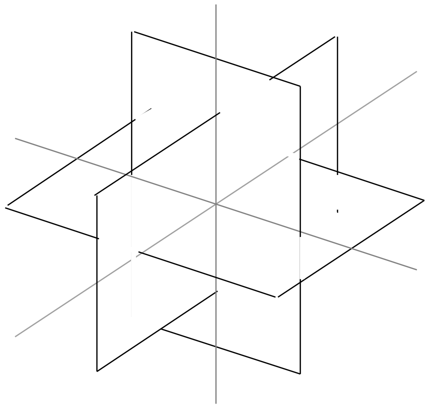
名刺型の紙を5枚使って正五角形を作りましょう！
正五角形は大・小2種類できます，2種類とも作りましょう…

ヒント　……　正五角形の対角線と辺の長さの比が黄金比であり，名刺の縦と横の長さの比もほぼ黄金比であることに着目します　……

チ　ャ　レ　ン　ジ　2

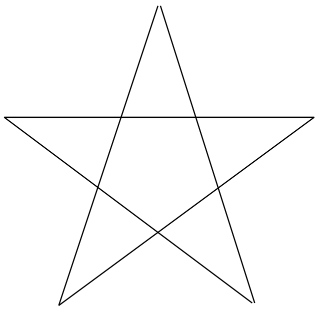
名刺型の紙3枚に切り込みを入れます，
その3枚を図のように立体的に組み合わせましょう！





ヒント　……　はじめに 2枚を組み合わせます．その組み合わせ方が　……

【黄金比】



ピタゴラスは自分達の学校のシンボルマークに“星五角形”（ペンタグラム）を採用しました．

それは，星五角形に見られる辺の比率が美しい性質を持っているからです．その比率“黄金比”は“美の象徴”として扱われ，実際，建築物・絵画・彫刻などに“黄金比”を見い出すことができます．

正五角形の対角線と辺の長さの比も“黄金比”になり，“ $x : 1 = 1 : x - 1$ ”と表されます．さて，黄金比“ x ”を計算で求めましょうか…

チ　ャ　レ　ン　ジ　3

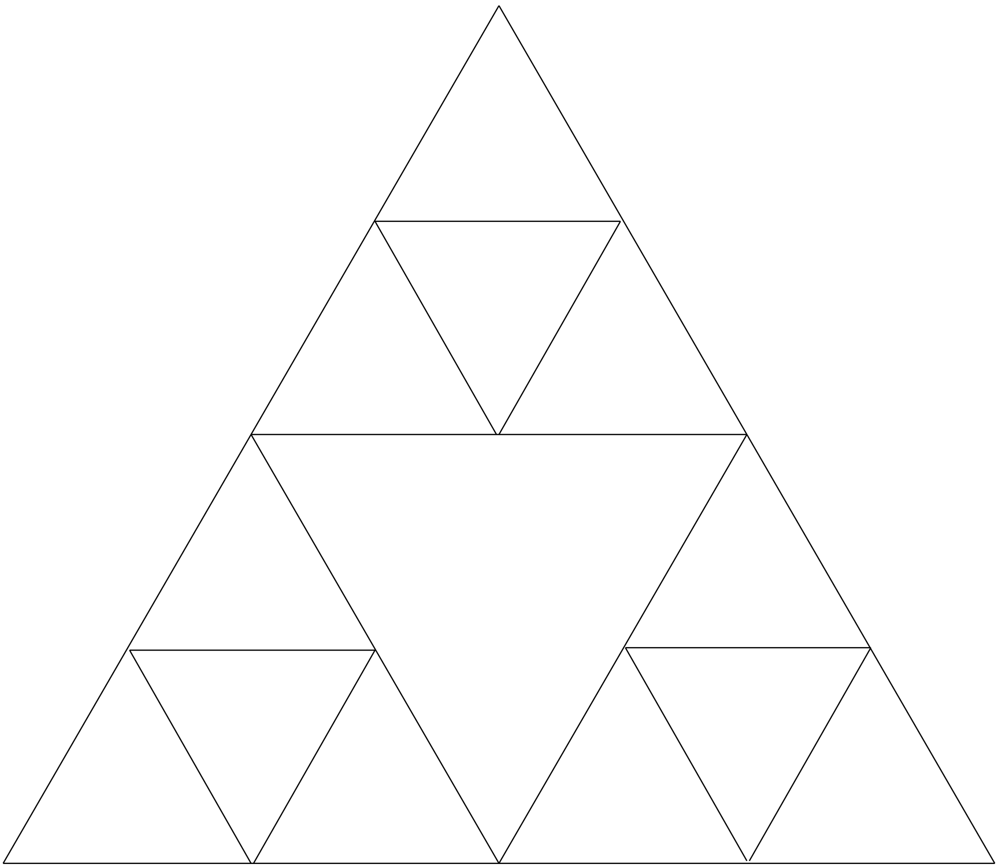
方程式を解こう！

$$x:1=1:x-1$$

チ　ャ　レ　ン　ジ　4

△の中に▽を，△の中に▽を　……

△の中に▽を　……　　　　繰り返し続けるとどうなる？

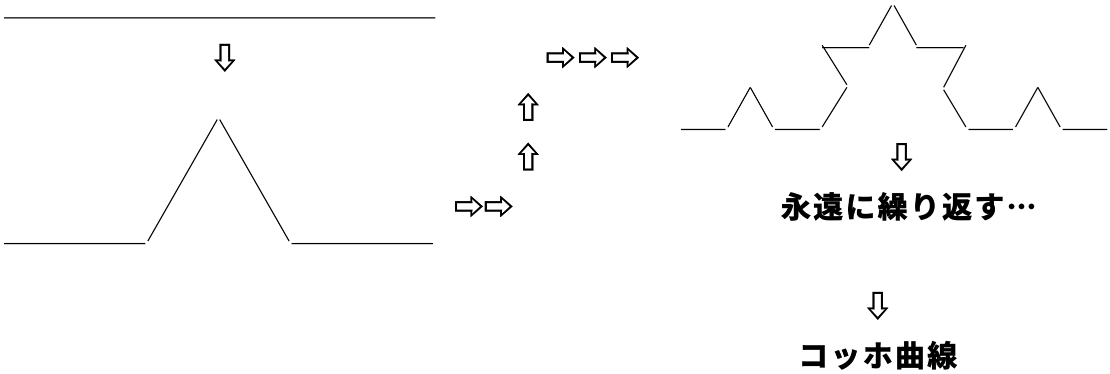


【簡単なフラクタル】

　チャレンジ４を実行すると何となく美しい図形ができませんか…　実際には，永遠に続けることは時間的にも，空間的にも不可能なことですが…

　でき上がった図形に関しては，どんな小さな△も全体の△と完全に相似になっています．このことを“自己相似”と言い，このような図形を“フラクタル”な図形であると言います．また，この図形を作者の名を借りて“シルピンスキーのギャスケット”と呼びます．

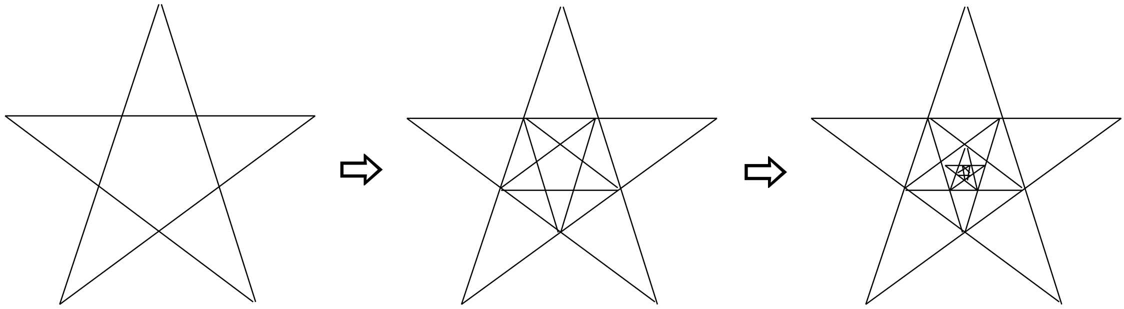
　他にも簡単なフラクタル図形としてコッホ曲線があります．この場合も，同じことの繰り返しをします．



【もう少しフラクタル】

　身近な物でフラクタルを考えましょう…　“テレビの中のテレビ”見たことがありますか？　うまくすると“テレビの中のテレビ”が永遠に続くのを見ることができるかも知れません．

　“星五角形の中の星五角形”はどうでしょうか？　どんなにうまく書いても，“星五角形の中の星五角形”が永遠に続くのを見ることは不可能です．でも，理論的には“星五角形の中の星五角形”と“正五角形の中の正五角形”を永遠に続けることは可能です．ピタゴラスはどう考えていたのでしょう？

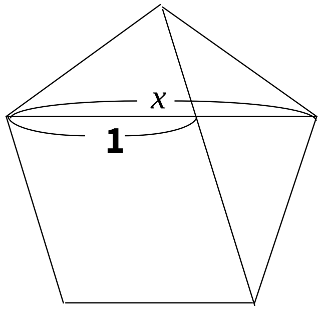


【黄金比φとフラクタル】

チャレンジ３で正五角形の対角線と辺の長さの比“ $x:1=1:x-1$ ”から黄金比を求めました．もう一度“ $x:1=1:x-1$ ”について検討してみます．

$$x:1=1:x-1 \Rightarrow x(x-1)=1 \Rightarrow x-1=\frac{1}{x} \Rightarrow x=1+\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}} \Rightarrow x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}} \Rightarrow \cdots\cdots$$

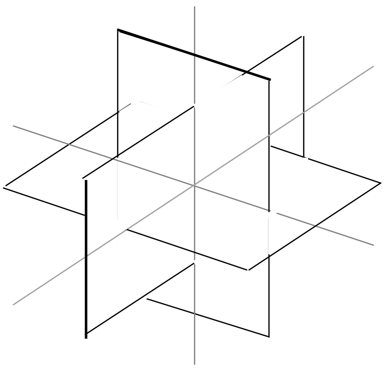


黄金比は，ギリシア文字φを使って表すのが普通です．よって，

$$\varphi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

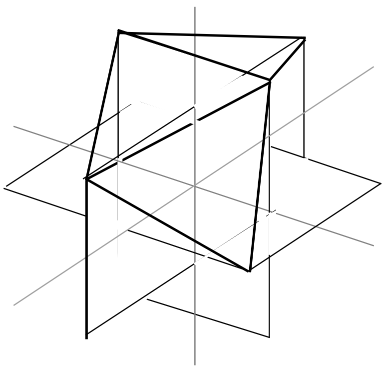
このような分数を“連分数”と言います．黄金比φは１だけからなる“フラクタルな連分数”です．また，黄金比φがあらわれる図形は“フラクタルな図形”でした．ピタゴラスは“フラクタルの元祖”だったのです．

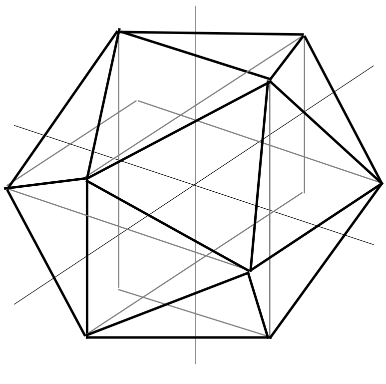
【立体のフラクタル】



チャレンジ２で作った３枚カードの組み合わせ立体を眺めてください…

３枚のカードの角を結ぶと…





正20面体のでき上がりです．さて，20個の正三角形の中心（重心,内心,外心）を結んだら何ができるでしょう？　正12面体ができるのは分かりますか？

３枚のカードの角は，正12面体のそれぞれの正五角形の中心であるとも考えられます．すなわち，12個の正五角形の中心を結ぶと正20面体ができる訳です．この正12面体と正20面体の関係は“双対性”と呼ばれています．

正20面体の中に正12面体ができ，その正12面体の中に正20面体ができる．また，その正20面体の中に正12面体ができ，さらに，その正12面体の中に正20面体ができる…

永遠に続けることができれば…　立体のフラクタルのでき上がりです．

“正多面体”の性質もピタゴラスの研究課題だったそうです…

【セパタクローのボールもどきを作ろう】

＊材料&道具　短冊６本（荷造りテープ），ホッチキス，ゼムクリップ７個ほど

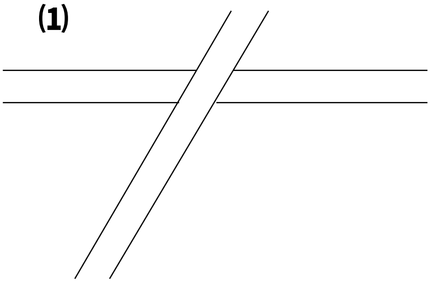
＊工程

１．短冊1本をリングにする（正方形分位を重ね，ホッチキスでとめる）

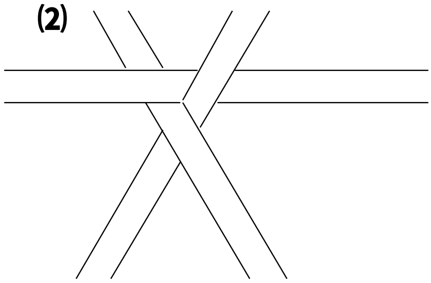
これは，ボールもどきの赤道になります…

２．残り5本を“三竦み”の条件下で，星形に組み合わせる

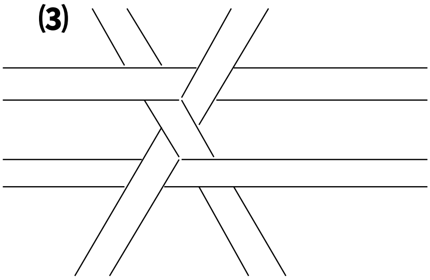
⑴



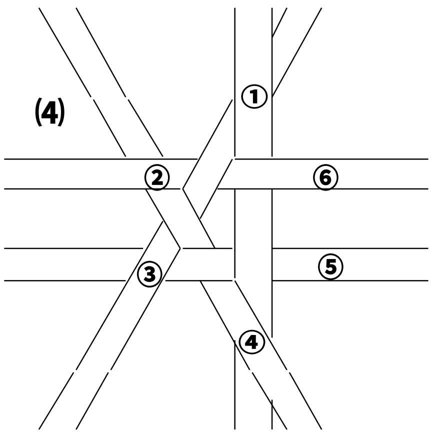
⑵



⑶



⑷



⑸　⑤を⑥の上に重ねて，星形完成

３． ①〜⑤の重なりをゼムクリップで固定する
これがボールもどきの南半球（北半球）です…

４． 赤道を“三竦み”の条件下で，南半球の上にセットします
このとき，短冊の端を“三竦み”になるよう重ね，ゼムクリップでとめていく

５． ５本の短冊を，それぞれリングにしながら北半球（南半球）を完成していく
このとき，“三竦み”を忘れてはいけません…

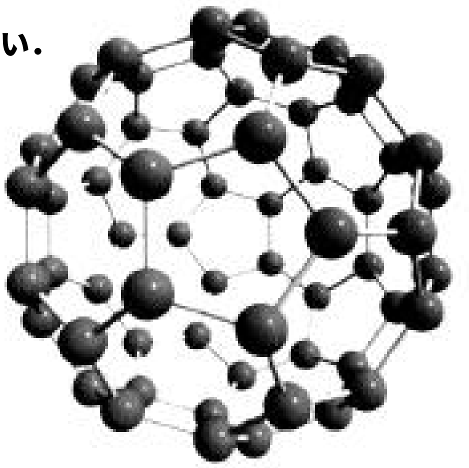
これで，セパタクロ一のボールもどきは完成です！

チ ャ レ ン ジ ５

最適サイズを求めよう！
セパタクローのボール，きっちり決まる短冊の幅と長さの関係は？

ヒント …… 各リングは，他の 5 本のリングと必ず 2 度ずつクロスしています

【フラクタルとフラーレン】

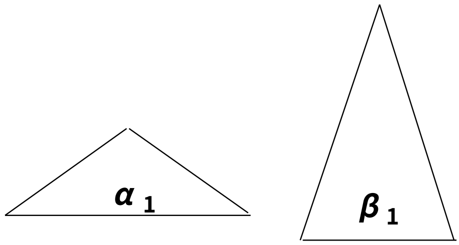


でき上がったボールもどきをじっくり眺めて下さい．12個の正五角形（星五角形）と20個の正三角形（正六角形）を見ることができます．これは，32パネルのサッカーボールと同じ構造であることに気付きましたか？

正12面体と正20面体は双対な関係で，ここにもフラクタルが潜んでいました．正12面体の20個の角を切り落としても，正20面体の12個の角を切り落としても同じ形の多面体ができます．切頭32面体，つまりサッカー（セパタクロー）ボール型です．

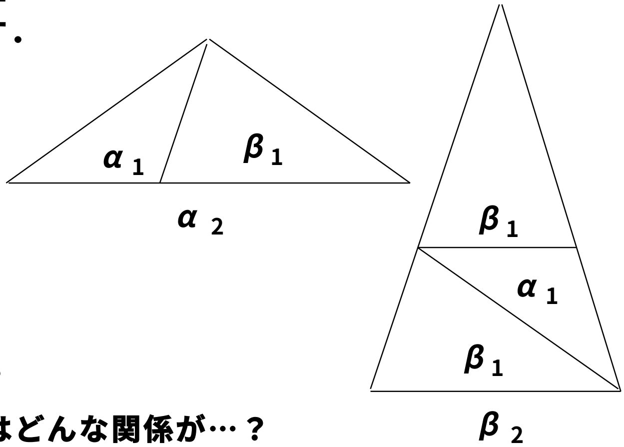
この切頭32面体はフラーレン（ C_{60} ）の分子構造としてもよく知られています．
フラクタルとフラーレン何か因縁めいたものを感じませんか …

【黄金比φとフラクタルな三角形】



　チャレンジ１で正五角形を作るとき，
二種類の二等辺三角形に出合いました．
　これらは黄金三角形が呼ばれますが，
小の正五角形を作るとき出合った順に
α_1，β_1と名付け，これらを基本にします．
　次に，大の正五角形を作るとき出合ったもの，つまり，基本の三角形をφ倍に拡大したものをそれぞれα_2，β_2と名付けます．
　右図から，次の関係は明らかです．

$$\begin{cases} \cdot\ \alpha_2 = \alpha_1 + \beta_1 \\ \cdot\ \beta_2 = \alpha_1 + 2\beta_1 \end{cases}$$



　続いて，α_2，β_2をφ倍に拡大
したものをα_3，β_3と名付けます．

$$\begin{cases} \cdot\ \alpha_3 = \alpha_2 + \beta_2 \\ \cdot\ \beta_3 = \alpha_2 + 2\beta_2 \end{cases}$$

という関係は成り立つでしょうか？
　（α_3，β_3）と（α_1，β_1）にはどんな関係が…？
　さらにφ倍の拡大を繰り返します．次々にできる二種類の三角形の組（α_4，β_4），（α_5，β_5），…，（α_n，β_n），… と（α_1，β_1）にはどんな関係が…？

チャレンジ６

黄金三角形の関係は…？
次の表に適する数を書きましょう！

n	α_n		β_n	
	α_1	β_1	α_1	β_1
2	1	1	1	2
3	2	3	3	5
4				
5				
6				
7				

ヒント　……　途中まで計算すれば，単純な計算の規則に気付くはず　……

【もっとフラクタル　…　黄金比とフィボナッチ数列】

　チャレンジ６の計算にある単純な規則は，黄金三角形の構造からも明らかになります．

　$\alpha_1 \Rightarrow \beta_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \alpha_3 \Rightarrow \beta_3 \Rightarrow \alpha_4 \Rightarrow \beta_4 \Rightarrow \alpha_5 \Rightarrow \beta_5 \Rightarrow \cdots$

と順に大きくなりますが，ここに単純な規則が潜んでいます．

　$\alpha_1+\beta_1=\alpha_2$ ，$\alpha_2+\beta_2=\alpha_3$ ，$\beta_2+\alpha_3=\beta_3$ ，$\alpha_3+\beta_3=\alpha_4$ ，…

すなわち，黄金三角形を《小 ⇨ 大》の順に並べると，『どの黄金三角形も直前に並んでいる２つの黄金三角形をくっつけてできる』という規則です．

　このことは，前ページの関係が次のように変型できることからも明らかです．

$$\begin{cases} \cdot\ \alpha_2=\alpha_1+\beta_1 \\ \cdot\ \beta_2=\alpha_1+2\beta_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \cdot\ \alpha_3=\alpha_2+\beta_2 \\ \cdot\ \beta_3=\alpha_2+2\beta_2 \end{cases} \quad \cdots \quad \begin{cases} \cdot\ \alpha_{n+1}=\alpha_n+\beta_n \\ \cdot\ \beta_{n+1}=\alpha_n+2\beta_n \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \cdot\ \alpha_2=\alpha_1+\beta_1 \\ \cdot\ \beta_2=\beta_1+\alpha_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \cdot\ \alpha_3=\alpha_2+\beta_2 \\ \cdot\ \beta_3=\beta_2+\alpha_3 \end{cases} \quad \cdots \quad \begin{cases} \cdot\ \alpha_{n+1}=\alpha_n+\beta_n \\ \cdot\ \beta_{n+1}=\beta_n+\alpha_{n+1} \end{cases}$$

　この《小 ⇨ 大》の順の関係は，《大 ⇨ 小》の順では『どの黄金三角形も次に並ぶ２つの黄金三角形に分解できる』という規則になります．さてこの規則，チャレンジ４での作業を思い出しませんか？

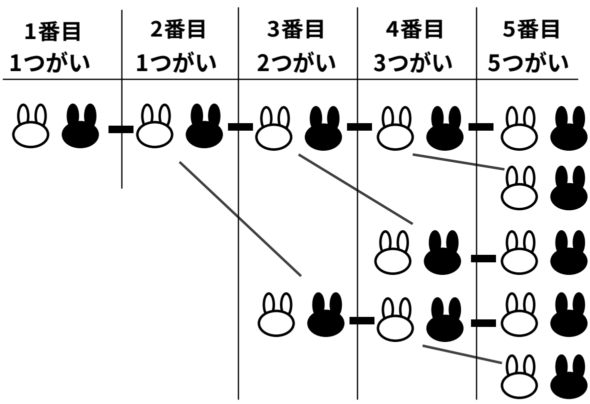
　二種類の黄金三角形には相互にフラクタルな性質があることが分かりました．

　チャレンジ６の表に記入した数は次のようです…

　　　1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，…

　この数は，黄金三角形にある規則にしたがっていて，“ フィボナッチ数列 ” と呼ばれています．もともとは，次のような数学の問題からできる数列でした…

Ⅰ. 子ウサギが1つがいいる，
Ⅱ. 子ウサギは1ヶ月で成長し毎月
　1つがいの子ウサギを産む，
Ⅲ. ウサギは死なない，
　このとき，毎月のウサギの
　　　つがい数を求めよ！



　フィボナッチ数列に現れる数は，自然現象とも関係ある数であることがよく知られています．

また，そのようなことに関心を持つ人たちのための“国際フィボナッチクラブ”という組織もあるそうです．

チャレンジ7

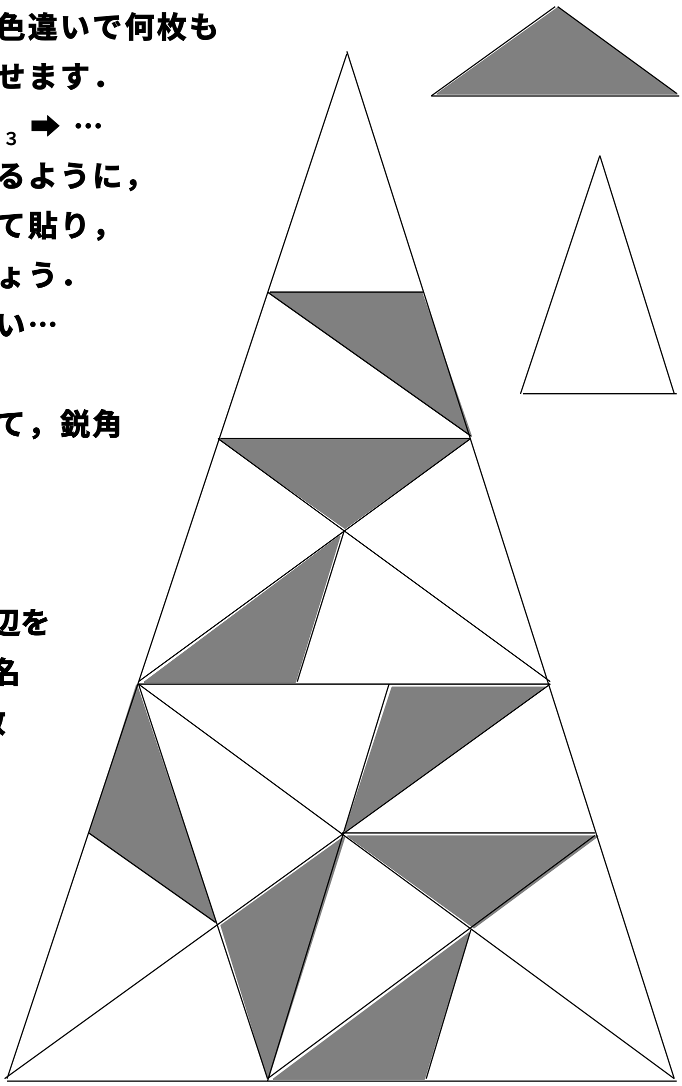
貼り紙でフラクタルしよう！
二種類の黄金三角形を順に並べて貼り，フラクタルをたしかめよう！

二種類の基本の黄金三角形を色違いで何枚も準備して，順に並べて貼り合わせます．

β_1 ➡ α_2 ➡ β_2 ➡ α_3 ➡ β_3 ➡ …

と，相互なフラクタル性が見えるように，基本の黄金三角形の枚数を数えて貼り，フィボナッチ数列を確認しましょう．

美しい作品を完成させて下さい…



正五角形のように名刺を使って，鋭角の黄金三角形を

β_1 ➡ β_2 ➡ β_3 ➡ β_4 ➡ …

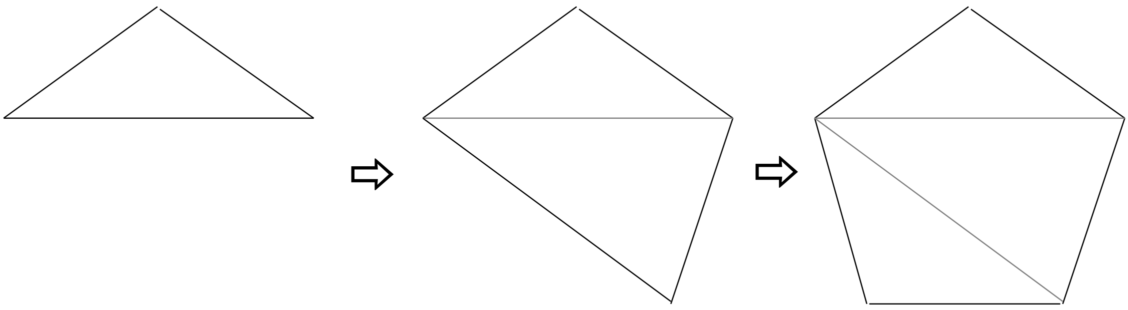
と順に作ります．

それぞれに使う名刺の枚数，長辺を使った名刺の枚数，短辺を使った名刺の枚数を数えてフィボナッチ数列を確認することができます．

解　　　　　説　　　　　編

＊＊＊　チャレンジ１　＊＊＊

下の図に並べる手順を示しました．



名刺型用紙の短辺と長辺をそのまま使えば，小・正五角形ができます．長辺と（短辺＋長辺）で同じ操作をすれば，大・正五角形ができます．

＊＊＊　チャレンジ２　＊＊＊

なかなか難しい作業です．あなたは何秒で完成しましたか？　10年前のサマーセミナーでの記録は25秒でした．

＊＊＊　チャレンジ３　＊＊＊

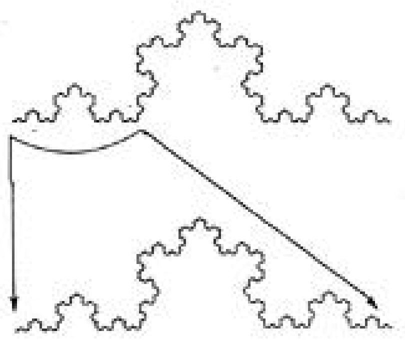
$x:1=1:x-1$ ⇨ $x(x-1)=1$ ⇨ $x^2-x=1$ ⇨ $x^2-x-1=0$

解の公式を用いて，

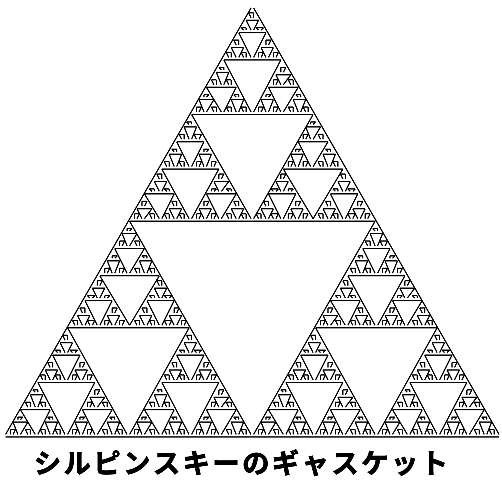
$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$x>1$ なので，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　（ $x=1.6180339$ ）

＊＊＊＊　チャレンジ４　＊＊＊

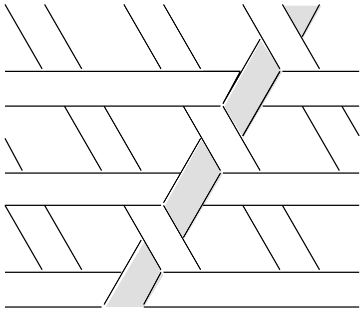


コッホ曲線



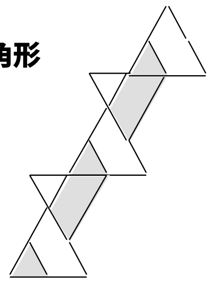
シルピンスキーのギャスケット

＊＊＊　チャレンジ５　＊＊＊



それぞれのリングは，他の５本のリングと必ず２度ずつクロスしています．

平面的に見れば，右図のように正三角形がちょうど20個だけ並んで，端と端がつながることになります．



短冊の幅をdとすれば，20個分の端から端までの長さは$10\sqrt{3}d$です．

しかし，リングにするため少し短めにしないと，きっちり決まりません．

今回は重ね合わせ部分（正方形の糊代）を含めて，$17.5d$の長さで準備しました．

（　幅：1.55㎝，長さ：27㎝　でした…　）．

＊＊＊　チャレンジ６　＊＊＊

n	α_n		β_n	
	α_1	β_1	α_1	β_1
2	1	1	1	2
3	2	3	3	5
4	5	8	8	13
5	13	21	21	34
6	34	55	55	89
7	89	144	144	233

“星五角形のヒ○ミ○ツ”これにておしまい…

『毎年何か新しいことを…』11年目のチャレンジは，“黄金比でフラクラル”でした．社会で利用されている最新の数学を，中学生・高校生の皆さんにも分かるように，できるだけ楽しい内容となる工夫をしたつもりですがいかがでしたか？

実のところ，それ以前に自分自身がしっかり把握する必要があり，準備の中でいくつかの発見もありました．例年通り，自分自身が一番楽しんだわけです…

つい最近，愛知教育大学の入試（後期試験）に“折り紙で正五角形を折る”という問題が出題されたと知りました．サマセミで入試突破も現実的になったようです！？

（セパタクローのボールもどきは，埼玉・大沢重憲先生の実践を真似たものです）